ОТКЛИК ДЕФЕКТНОГО НЕДИСПЕРГИРУЮЩЕГО ТЕЛА СО СВОЙСТВАМИ НОРМАЛЬНОГО МЕТАЛЛА НА НЕСТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

RESPONSE OF THE DEFECTIVE NONDISPERSIVE BODY WITH THE PROPERTIES OF NORMAL METAL TO THE NONSTATIONARY ELECTROMAGNETIC FIELD

С.В. Марвин, к. ф-м. н.
ФГАОУ ВПО УрФУ, ИРИТ-РтФ (Екатеринбург); sergmarvin@mail.ru

Abstract

Are examined the integral-differential equations of electrodynamics for the nonstationary electromagnetic field, which interacts with the defective nonmagnetic metal without the dispersion. It is proven that exist a unique solution of these equations. As a result application to this decision of the inverse transformation of Laplace it is possible to find the electromagnetic field, distorted by defects inside the metallic body, at any point of space outside the body.

1. Введение

Нестационарные методы дефектоскопии и структуроскопии заключаются в использовании токов и полей, меняющихся не по гармоническому закону: исследуемый металлический образец помещается в поле нестационарного тока, искажает поле, и по искажению (полю реакции) судят о наличии или отсутствии дефектов в образце.

Нестационарные электромагнитные поляописываются начально-краевыми задачами электродинамики.Для исследования этих задач на существование и единственность решения, а также для численного решения начально-краевых задач, наиболее удобны уравнения электродинамики в интегро-дифференциальной форме [1]:интегро-дифференциальные уравнения автоматически учитывают условия сопряжения на границе раздела сред; если найдено поле внутри рассеивающего тела, поле снаружи тела можно найти с помощью интегро-дифференциальных уравнений прямым вычислением; интегральные операторы, фигурирующие в интегро-дифференциальных уравнениях, ограничены, что помогает обосновывать сходимость численных методов решения этих уравнений.

Ранее с помощью интегро-дифференциальных уравнений были доказаны существование и единственность классического(то есть, не обобщенного) решения начально-краевой задачи электродинамики для немагнитного металла [2-3]. Предполагалось, что электропроводность рассеивающего металлического тела должна быть бесконечно гладкой функцией пространственных координат, а граница тела должна быть не просто гладкой поверхностью, а поверхностью Ляпунова.

Указанные предположения относительно гладкости электропроводности и гладкости границы тела представляются слишком сильными для дефектоскопии и структуроскопии: на границах реальных дефектов и инородных включений происходит не гладкое, а скачкообразное изменение электропроводности, и границы реальных физических тел обычно не гладкие, а кусочно-гладкие. Поэтому целесообразно обобщить ранее полученные результаты на кусочно-непрерывную электропроводность и кусочно-гладкую границу.

2. Исходные предположения

Будем считать, что металлическое тело занимает ограниченную область Ω; граница Ω — кусочно-гладкая. Дефекты или инородные включения занимают области Ω_1, Ω_2,..., Ω_n с кусочно-гладкими границами; замыкания этих областей не пересекаются и полностью содержатся в Ω: $\overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j = \varnothing$ при $i \neq j$; $\overline{\Omega}_i \subset \Omega$. Сторонний ток сосредоточен в ограниченном замкнутом множестве T (T может быть областью с границей; если прибегать к модели бесконечно тонкого проводника, T будет кривой в пространстве). $\overline{\Omega}$ и T не пересекаются: $\overline{\Omega} \cap T = \varnothing$. Поле реакции измеряется в ограниченном замкнутом множестве T_1 (то есть, в T_1 расположен измерительный проводник; в измерительном проводнике электромагнитное поле создает ЭДС). T_1 не пересекается ни с T, ни с $\overline{\Omega}$: $T_1 \cap \overline{\Omega} = \varnothing$; $T_1 \cap T = \varnothing$ (рис. 1).

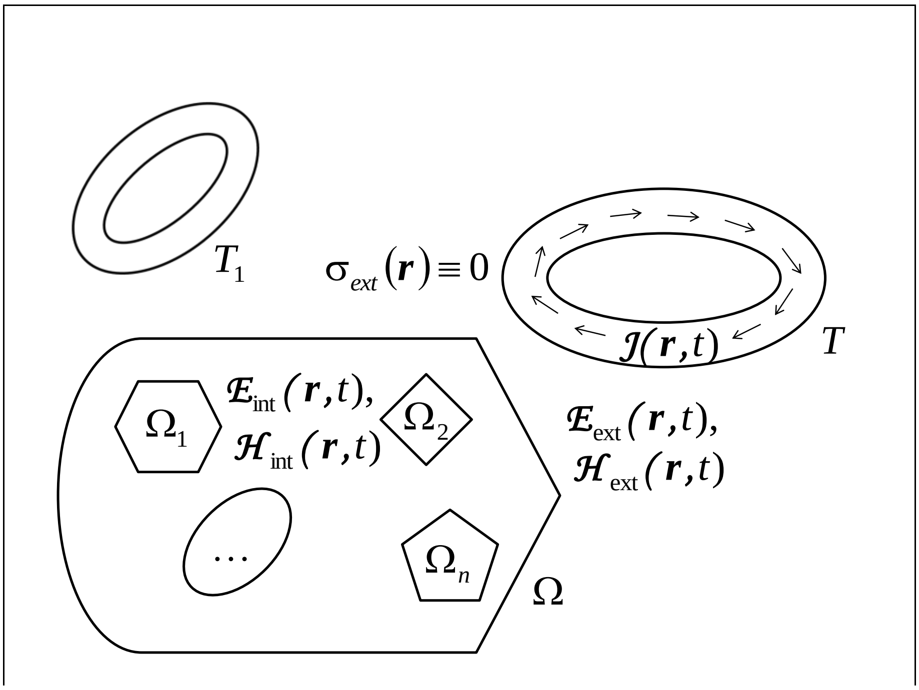

Рис. 1. Токовая область T, измерительный проводник T_1 и металлическое тело Ω с дефектами Ω_i.

Электропроводность тела σ непрерывна во внутренних точках Ω_i и в точках Ω, внешних по отношению к Ω_i. Кроме того, σ допускает непрерывное продолжение на границу Ω_i как изнутри, так и снаружи Ω_i (хотя при переходе через границу Ω_i электропроводность σ терпит разрыв). Также σ допускает непрерывное продолжение на границу Ω изнутри области. В дефектоскопии и структуроскопии используются медленно меняющиеся поля, поэтому пространственной и временной дисперсией электропроводности можно пренебречь. Металл, из которого изготовлен образец, предполагается нормальным (то есть, не сверхпроводящим и не имеющим какое-либо магнитное упорядочение в отсутствии внешнего магнитного поля), поэтому его магнитную проницаемость можно считать равной 1 (речь может идти, например, о меди, алюминии, цинке при комнатной температуре; вообще, магнитные восприимчивости нормальных металлов имеют порядок $10^{-4} - 10^{-6}$). Диэлектрическая проницаемость ионного остова металла с высокой точностью можно считать равной 1 [4].

Электропроводность внешней среды предполагается равной 0. Диэлектрическая и магнитная внешней среды предполагаются равными 1.

При перечисленных предположениях интегро-дифференциальные уравнения для нестационарного электромагнитного поля принимают вид:

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},p) = \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r},p) + \dfrac{\text{graddiv - }\varepsilon_0\mu_0 p^2}{\varepsilon_0 p} \displaystyle\int_\Omega G(p,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\sigma(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',\text{p})d\boldsymbol{r}' \\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},p) = -\dfrac{1}{\mu_0 p}\text{rot}\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r},p) + \text{rot}\displaystyle\int_\Omega G(p,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\sigma(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',\text{p})d\boldsymbol{r}' \end{cases}, \quad (1)$$

где $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ — изображения по Лапласу напряженностей электрического и магнитного поля; $\boldsymbol{r}$ — упорядоченный набор пространственных координат (x,y,z); p — параметр в преобразовании Лапласа; $G(p,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \dfrac{\exp\left(-p\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\right)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$; $\boldsymbol{E}_0$ — изображение по Лапласу напряженности стороннего электрического поля (создаваемого сторонним током).

В случае если T — замкнутая область, то

$$\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r},p)=\frac{\operatorname{grad}\operatorname{div}-\varepsilon_0\mu_0 p^2}{\varepsilon_0 p}\int_T G(p,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',p)d\boldsymbol{r}'. \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{J}$ — изображение по Лапласу плотности стороннего тока.

Если T — кусочно-гладкая кривая (бесконечно тонкий проводник), то

$$\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r},p)=\frac{1}{\varepsilon_0 p}\operatorname{rot}\int_a^b \frac{\exp\left(-p\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(\tau)|^2} I(\boldsymbol{r}'(\tau),p)[\boldsymbol{l}(\tau)\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(\tau))]d\tau, \qquad (3)$$

где $\boldsymbol{r}(\tau)$ — параметрическое задание кривой через параметр, обозначенный как τ; I — сила тока; $\boldsymbol{l}(\tau)=\boldsymbol{r}'(\tau)$ — касательный вектор; a и b — пределы параметризации.

3. Существование и единственность решения. Анализ зависимости от параметра *p*

В работах [2] и [3] было доказано, что при достаточно больших значениях вещественной части параметра p у системы уравнений (1) существует единственное квадратично суммируемое в Ω решение: при достаточно больших $\operatorname{Re}(p)$ выполняется условие теоремы о сжатых отображениях, и эта теорема гарантирует существование и единственность решения.Оценки норм интегральных операторов, выполненные в [2] и [3] для бесконечно гладкой электропроводности, справедливы и для кусочно-непрерывной электропроводности. Следовательно, и в предположениях данной работы существует единственное решение системы (1).

Кроме того, основываясь на результатах работ [2] и [3] можно показать, что если сторонний ток включается достаточно плавно (как $t^{1+\alpha}$) среднеквадратичная норма $\|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},p)\|_{L_2(\Omega)}=\sqrt{\int_\Omega|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},p)|^2 d\boldsymbol{r}}$ при $|p|\to+\infty$ убывает не медленнее, чем $\frac{1}{|p|^{2+\alpha}}$:

$$\|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},p)\|_{L_2(\Omega)}=O\left(\frac{1}{|p|^{2+\alpha}}\right),\ |p|\to+\infty. \qquad (4)$$

Простой анализ выражений (2) и (3) показывает, что во всех практически полезных случаях

$$\max_{\boldsymbol{r}\in\overline{\Omega}}\left|\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r},p+\Delta p)-\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r},p)\right|\xrightarrow[\Delta p\to 0]{}0, \qquad (5)$$

$$\max_{\boldsymbol{r}\in\overline{\Omega}}\left|\frac{\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r},p+\Delta p)-\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r},p)}{\Delta p}-\frac{\partial\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r},p)}{\partial p}\right|\xrightarrow[\Delta p\to 0]{}0. \qquad (6)$$

$$\max_{\boldsymbol{r}\in\overline{\Omega}}\left|\operatorname{rot}\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r},p+\Delta p)-\operatorname{rot}\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r},p)\right|\xrightarrow[\Delta p\to 0]{}0, \qquad (7)$$

$$\max_{\boldsymbol{r}\in\overline{\Omega}}\left|\frac{\operatorname{rot}\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r},p+\Delta p)-\operatorname{rot}\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r},p)}{\Delta p}-\frac{\partial\operatorname{rot}\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r},p)}{\partial p}\right|\xrightarrow[\Delta p\to 0]{}0. \qquad (8)$$

Аналогичные предельные соотношения имеют место и для T_1, и для любого другого ограниченного замкнутого множества, не имеющего общих точек с T.

Кроме того,

$$\max_{\boldsymbol{r}\in T}\left|\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r},p)\right|=O\left(\frac{1}{|p|^{1+\alpha}}\right),\ |p|\to+\infty, \qquad (9)$$

$$\max_{\boldsymbol{r}\in T}\left|\mathrm{rot}\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r},p)\right| = O\left(\frac{1}{|p|^{\alpha}}\right), |p|\to+\infty. \qquad (10)$$

Заметим, что предельные соотношения (5) - (8) означают равномерную сходимость, из которой для любого ограниченного измеримого множества вытекает среднеквадратичная сходимость.

Анализ первого уравнения в системе (1) показывает, что существует квадратично суммируемая производная $\dfrac{\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},p)}{\partial p}$ и имеет место среднеквадратичная сходимость:

$$\left\|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},p+\Delta p)-\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},p)\right\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}\xrightarrow[\Delta p\to 0]{}0, \qquad (11)$$

$$\left\|\frac{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},p+\Delta p)-\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},p)}{\Delta p}-\frac{\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},p)}{\partial p}\right\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}\xrightarrow[\Delta p\to 0]{}0. \qquad (12)$$

Заметим, что в силу системы (1), функции $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},p)$ и $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},p)$ в точках, внешних по отношению к Ω, выражаются через $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},p)$ и $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},p)$ внутри Ω (интегралы в уравнениях вычисляются по области Ω). Воспользовавшись этим обстоятельством, с помощью соотношений (4) - (12) можно показать, что в T_1 существуют производные $\dfrac{\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},p)}{\partial p}$ и $\dfrac{\partial\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},p)}{\partial p}$, причем

$$\max_{\boldsymbol{r}\in T_1}\left|\frac{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},p+\Delta p)-\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},p)}{\Delta p}-\frac{\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},p)}{\partial p}\right|\xrightarrow[\Delta p\to 0]{}0,$$

$$\max_{\boldsymbol{r}\in T_1}\left|\frac{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},p+\Delta p)-\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},p)}{\Delta p}-\frac{\partial\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},p)}{\partial p}\right|\xrightarrow[\Delta p\to 0]{}0,$$

$$\max_{\boldsymbol{r}\in T_1}\left|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},p)\right| = O\left(\frac{1}{|p|^{1+\alpha}}\right), |p|\to+\infty,$$

$$\max_{\boldsymbol{r}\in T_1}\left|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},p)\right| = O\left(\frac{1}{|p|^{1+\alpha}}\right), |p|\to+\infty.$$

Следовательно, во всех точках T_1, к изображениям $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ можно применить обратное преобразование Лапласа:

$$\begin{cases}\mathcal{E}(\boldsymbol{r},t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},p)\exp(pt)d\,\mathrm{Im}(p)\\ \mathcal{H}(\boldsymbol{r},t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},p)\exp(pt)d\,\mathrm{Im}(p)\end{cases}. \qquad (13)$$

Напряженности $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$, получающиеся в результате (13), являются непрерывными функциями времени t, равны нулю при $t=0$ и при малых значениях t растут не быстрее, чем t^{α}.

Заключение

Методы и приемы, которые позволяют оценить среднеквадратичные нормы и модули $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, напрямую связаны с принципом сжатых отображений. Этот фундаментальный математический принцип полезен не только для доказательства существования и единственности решения уравнений: на нем основан один из основных методов численного решения уравнений — метод итераций. Поэтому естественным развитием идей и результатов данной статьи является разработка приближенных методов вычисления нестационарного поля при различных предположениях относительно формы металлического тела, а также относительно формы и размеров дефектов внутри тела.

Список литературы

1. Дякин В.В., Раевский В.Я. Прямая и обратная задача классической электродинамики// Дефектоскопия.1996. № 10. С 31-39.

2. Дякин В.В., Марвин С.В.Начально-краевая задача и интегро-дифференциальные уравнения электродинамики для немагнитного проводящего тела// Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48. № 2. С. 288–296.

3. Марвин С.В., Дякин В.В. Начально-краевая задача электродинамики для немагнитного проводящего образца// Электричество.— 2008. № 12. С. 30-36.

4. Туров Е.А. Материальные уравнения электродинамики. М.: Наука, 1983. 158 с.